(c) Demostreu que, independentment de l'amplitud, quan se sumen (o resten) tensions de freqüències diferents, $|V_{12}|^2 = |V_1|^2 + |V_2|^2$. Quina relació hi ha entre els seus valors RMS?

L'amplitud mitjana quadràtica (RMS) està definida com:

$$V_{12,\text{RMS}} = \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} V(x)^2 dx} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (V_1(x)+V_2(x))^2 dx}.$$

Si tenim dos tensions alternes amb freqüències diferents, calculem la intergral de la suma (o la diferència):

$$\int_{-T}^{T} (V_1(x) \pm V_2(x))^2 dx = \int_{-T}^{T} (V_1 \cos(\omega_1 x) \pm V_2 \cos(\omega_2 x))^2 dx =$$

$$= \int_{-T}^{T} (V_1^2 \cos^2(\omega_1 x) + V_2^2 \cos^2(\omega_2 x) \pm V_1 V_2 \cos(\omega_1 x)\cos(\omega_2 x)) dx =$$

$$= \left[V_1^2 \frac{1}{2} t + \frac{sin(2\omega_1 x)}{4\omega_1} + V_2^2 \frac{1}{2} t + \frac{sin(2\omega_2 x)}{4\omega_2} \pm \frac{\omega_1 \sin(\omega_1 x)\cos(\omega_2 x) - \omega_2 \cos(\omega_1 x)\sin(\omega_2 x)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right]_{-T}^{T} =$$

$$= T[V_1^2 + V_2^2] + \xi(T),$$

on $\xi(T)$ és una funció fitada per tot $T \in \mathbb{R}$.

Per tant, substituint a la primera expressió:

$$V_{12,\text{RMS}} = \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2T}\left[T(V_1^2 + V_2^2) + \xi(T)\right]} = \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2}\left[V_1^2 + V_2^2 + \frac{\xi(T)}{T}\right]} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{V_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{V_2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{V_{1,\text{RMS}}^2 + V_{2,\text{RMS}}^2},$$

on hem utilitzat que com $\xi(T)$ és fitada per tot T, aleshores $\frac{\xi(T)}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$.

Per tant, reorganitzant l'equació:

$$V_{12,\text{RMS}}^2 = V_{1,\text{RMS}}^2 + V_{2,\text{RMS}}^2$$

Si tenim en compte que $V_{i,\text{RMS}} = \frac{V_i}{\sqrt{2}}$, aleshores substituint obtenim la igualtat que ens demanaven demostrar.