Exercici 3.11
Geometria Diferencial

Adrià Vilanova Martínez

15 de març de 2021

Problema 3.11. Calculeu la segona forma fonamental, l'aplicació de Weingarten, les curvatures principals, les direccions principals i assimptòtiques, les curvatures mitja H i gaussiana K, i identifiqueu les línies de curvatura i assimptòtiques si podeu, en les superfícies següents:

a) Cilindre: $\varphi(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$.

b) Helicoide: $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$.

c) Catenoide: $\varphi(u,v) = a(\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u)$.

Solució:

Per calcular la segona forma fonamental de les dues superfícies, ho farem mitjançant la següent expressió:

$$\mathrm{II}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \vec{n}\cdot\varphi_{uu} & \vec{n}\cdot\varphi_{uv} \\ \vec{n}\cdot\varphi_{vu} & \vec{n}\cdot\varphi_{vv} \end{pmatrix}$$

Així doncs, necessitem calcular d'avantmà les derivades segones de les parametritzacions i l'aplicació de Gauss (vector normal unitari) que, degut al fet que les superfícies ens venen donades en forma de parametrització, es pot calcular com:

$$\vec{n}(u,v) = \frac{1}{\left\|\vec{N}(u,v)\right\|}\vec{N}(u,v)$$

on $\vec{N}(u,v) = \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)$.

Fem aquests càlculs per cadascuna de les superfícies:

Cilindre:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_u(u,v) = a(-\sin u, \cos u, 0) \implies \begin{cases} \varphi_{uu}(u,v) = a(-\cos u, -\sin u, 0) \\ \varphi_{uv}(u,v) = (0,0,0) \end{cases} \\ \varphi_v(u,v) = (0,0,1) \implies \varphi_{vv}(u,v) = (0,0,0) \\ \varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v) = a(-\sin u,\cos u,0)\times(0,0,1) = a(\cos u,\sin u,0) \implies \\ \implies \vec{n}(u,v) = \frac{a}{a}(\cos u,\sin u,0) = (\cos u,\sin u,0) \end{array}\right\} \implies$$

$$\Longrightarrow \mathrm{II}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Helicoide:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 0) \implies \begin{cases} \varphi_{uu}(u,v) = (0,0,0) \\ \varphi_{uv}(u,v) = (-\sin v, \cos v, 0) \end{cases} \\ \varphi_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, b) \implies \varphi_{vv}(u,v) = (-u\cos v, -u\sin v, 0) \\ \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) = (b\sin v, -b\cos v, u) \implies \vec{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{b^2+u^2}}(b\sin v, -b\cos v, u) \end{array}\right\} \implies$$

$$\Longrightarrow \mathrm{II}_{(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{b^2+u^2}} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Catenoide:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi_u(u,v) = a(\sinh u\cos v, \sinh u \sin v, 1) \implies \begin{cases} \varphi_{uu}(u,v) = a\cosh u(\cos v, \sin v, 0) \\ \varphi_{uv}(u,v) = a\sinh u(-\sin v, \cos v, 0) \end{cases} \\ \varphi_v(u,v) = a\cosh u(-\sin v, \cos v, 0) \implies \varphi_{vv}(u,v) = a\cosh u(-\cos v, -\sin v, 0) \\ \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) = a^2\cosh u(-\cos v, -\sin v, \sinh u) \implies \\ \implies \vec{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}(-\cos v, -\sin v, \sinh u) = \frac{1}{\cosh u}(-\cos v, -\sin v, \sinh u) \end{array}\right\} \implies$$

$$\Longrightarrow \mathrm{II}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ara calcularem la primera forma fonamental de cada superfície, ja que ens farà falta per calcular les diverses curvatures:

$$\mathrm{I}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}$$

Cilindre:

$$\mathrm{I}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \Sigma_{(u,v)} = \mathrm{I}^{-1}_{(u,v)}\,\mathrm{II}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Helicoide:

$$\mathrm{I}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+b^2 \end{pmatrix} \implies \Sigma_{(u,v)} = \mathrm{I}^{-1}_{(u,v)}\,\mathrm{II}_{(u,v)} = -\frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b^2+u^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Catenoide:

$$\mathrm{I}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} a^2\cosh^2 u & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 u \end{pmatrix} \implies \Sigma_{(u,v)} = \mathrm{I}^{-1}_{(u,v)}\,\mathrm{II}_{(u,v)} = \frac{1}{a\cosh^2 u} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les curvatures principals són els VAPs de les diferents matrius $\Sigma_{(u,v)}$ de l'aplicació de Weingarten, i les direccions principals són els VEPs corresponents. Aleshores, les curvatures principals del cilindre són $-\frac{1}{a}$ i 0 amb direccions principals $[\varphi_u]$ i $[\varphi_v]$ corresponentment, ja que la matriu ja és diagonal i la matriu de l'aplicació està en base φ_u, φ_v.

Pel mateix motiu, les curvatures principals del catenoide són $\frac{-1}{a\cosh^2 u}$ o $\frac{1}{a\cosh^2 u}$, amb direccions principals $[\varphi_u]$ i $[\varphi_v]$ corresponentment.

En quant a l'helicoide, es pot comprovar que una matriu del tipus $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ amb $a, b < 0$ té VAPs $\sqrt{ab}$, $-\sqrt{ab}$ i els corresponents VEPs $(\sqrt{-a}, \sqrt{-b})$ i $(\sqrt{-a}, -\sqrt{-b})$. Per tant, les curvatures principals són $\frac{b}{b^2+u^2}$ i $\frac{-b}{b^2+u^2}$ i les direccions principals corresponents són $\left[\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}}, \sqrt{\frac{b}{(b^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}}\right)\right]$ i $\left[\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}}, -\sqrt{\frac{b}{(b^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}}\right)\right]$.

La curvatura mitjana ve definida per la següent expressió:

$$H(p) = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

on K_1, K_2 són les curvatures principals.

D'aquesta definició és fàcil veure que la curvatura mitjana pel cilindre és $-\frac{1}{2a}$, i que pel catenoide i l'helicoide és nul · la.

Per una altra banda, la curvatura gaussiana té la següent expressió:

$$K(p) = K_1 \cdot K_2$$

Així doncs, la curvatura gaussiana del cilindre és nul · la, la del catenoide és $\frac{-1}{a^2\cosh^4 u}$ i la de l'helicoide és $\frac{-b^2}{(b^2+u^2)^2}$.

Una línia de curvatura és una corba $\gamma \subset S$ tal que $T_p\gamma$ és una direcció principal de curvatura de S en P per tot p.

Aleshores, en el cas del cilindre i el catenoide, on les direccions principals de curvatura són φ_u, φ_v, està clar que les línies de curvatura són els meridians (les corbes on es deixa la u fixa) i els paral · lels (les corbes on es deixa la v fixa).

Nota: *el codi LaTeXde la resolució d'aquest problema es pot trobar a* `https://gerrit.avm99963.com/plugins/gitiles/edu/college-misc/+/master/quad8/gd/entregables/p3_11/`*. S'accepten tot tipus de suggerències, correccions, comentaris, etc. :)*

Una cosa a millorar és el fet que falta afegir la part relativa a les direccions/línies assimptòtiques. Tinc pensat afegir-ho quan surti aquesta definició a teoria o problemes. A part, també faltaria veure quines són les línies de curvatura pel cas de l'helicoide.